张宇高等数学下强化班讲义

新东方在线

www.koolearn.com

网络课堂电子教材系列

新东方在线网络课程电子教材系列

第一讲　多元函数微分学

综述

1. 概念
2. 计算 —— 微分法
3. 应用 —— 极值和最值问题

一、概念

1. 连续性

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

【注】 若"$\neq$"，叫"间断"，但不讨论间断类型.

2. 偏导数的存在性

$z=f(x,y)$，

$$f'_x(x_0,y_0)=z'_x(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x}$$

$$\triangleq\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x};$$

$$f'_y(x_0,y_0)\triangleq\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

(1) 定义法.

【例】 设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^6}$，求 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$.

【分析】

（2）公式法.

【例】[取自 2018 年真题数学二（13）题]

设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\ln z+\mathrm{e}^{z-1}=xy$ 确定，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(2,\frac{1}{2}\right)}=$________.

【分析】

3. 可微性

$z=f(x,y)$.

（1）全增量　$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$.

（2）线性增量　$A\Delta x+B\Delta y\begin{cases}A=f'_x(x_0,y_0),\\B=f'_y(x_0,y_0).\end{cases}$

（3）$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0\Rightarrow f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，

$\Delta z=(A\Delta x+B\Delta y)+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$.

【例】设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,1)}=$ ________.

【分析】

二、计算(多元函数微分法)

(1) 链式求导法则.

(2) 对于高阶导数.

无论 z 对谁求导，也无论对 z 已经求了几次导，求导之后的新函数仍具有与原来函数完全相同的复合结构.

(3) 注意书写规范.

【例 1】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P38，B 组 5.15(数学二 P38，B 组 4.14；数学三 P36，A 组 4.25)]

设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，$y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 分别由方程 $\mathrm{e}^{xy}-y=0$ 和 $\mathrm{e}^{z}-xz=0$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

【分析】

【**例 2**】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P36,A 组 5.16(数学二 P37,A 组 4.23;数学三 P37,B 组 4.8)]

设函数 $f(x,y)$ 可微,又 $f(0,0)=0, f'_x(0,0)=a, f'_y(0,0)=b$,且 $\varphi(t)=f[t,f(t,t^2)]$,求 $\varphi'(0)$.

【**分析**】

【**例 3**】[取自《张宇考研数学闭关修炼一百题》P17,33 题]

已知 $z(u,v)$ 对 u,v 有二阶连续偏导数,设变换$\begin{cases} u=x-2y, \\ v=x+ay \end{cases}$可把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$,求 a.

【**分析**】

【**例 4**】[取自《张宇考研数学闭关修炼一百题》P16,32 题]

设函数 $f(x,y)$ 的一阶偏导数连续,在$(1,0)$ 的某邻域内有

$$f(x,y) = 1 - x - 2y + o(\sqrt{(x-1)^2 + y^2})$$

成立. 记 $z(x,y) = f(e^y, x+y)$,则 $dz(x,y)\big|_{(0,0)} =$ ________.

【**分析**】

【**例 5**】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题・习题分册》数学二 P40,C 组 4.5(数学三 P39,C 组 4.6)]

设 $f(x)$ 具有一阶连续导数,$f(0) = 0$,且表达式

$$[xy(1+y) - f(x)y]dx + [f(x) + x^2 y]dy$$

为某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分.

(1) 求 $f(x)$;

(2) 求 $u(x,y)$ 的一般表达式.

【**分析**】

三、应用 —— 多元函数的极值、最值

1. 理论依据

(1) 无条件极值.

① 函数取极值的必要条件.

设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处 $\begin{cases}\text{一阶偏导数存在,}\\ \text{取极值,}\end{cases}$ 则 $f'_x(x_0,y_0)=0, f'_y(x_0,y_0)=0$.

【注】 适用于三元及以上

② 函数取极值的充分条件.

$$\text{记}\begin{cases} f''_{xx}(x_0,y_0)=A, \\ f''_{xy}(x_0,y_0)=B \\ f''_{yy}(x_0,y_0)=C, \end{cases}\text{,则 } \Delta=B^2-AC\begin{cases} <0\begin{cases} A>0\Rightarrow \text{极小值点,} \\ A<0\Rightarrow \text{极大值点,} \end{cases} \\ >0\Rightarrow \text{不是极值点,} \\ =0\Rightarrow \text{该法失效,另谋他法.} \end{cases}$$

【例】[取自《张宇考研数学闭关修炼一百题》P18,36 题]

设 $z=z(x,y)$ 是由 $9x^2-54xy+90y^2-6yz-z^2+18=0$ 确定的函数. 求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

【分析】

(2) 条件极值与拉格朗日乘数法

问题提法:求目标函数 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0,\\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}$ 下的极值.

固定格式

① 构造辅助函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$;

② 令 $F'_x=0,F'_y=0,F'_z=0,F'_\lambda=0,F'_\mu=0\Rightarrow P_i(i=1,2,\cdots,n)$;

③ 解方程组 $\Rightarrow P_i(x_i,y_i,z_i)\Rightarrow u(P_i)$,比较 $\Rightarrow$ 取最大、最小者为最大、最小值.

根据实际问题,必存在最值,所得即所求.

【例】[取自 2018 年真题数学一(16) 题(数学二(19) 题;数学三(17) 题)]

将长为 2 m 的铁丝分成三段,依次围成圆、正方形与正三角形,三个图形的面积之和是否存在最小值?若存在,求出最小值.

【分析】

第二讲　二重积分

综述

1. 概念与对称性
2. 计算（直角坐标系，极坐标系）

一、概念与对称性

1. 概念对比

2. 对称性

（1）普通对称性.

设 D 关于 y 轴对称，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)=f(-x,y),\\ 0, & f(x,y)=-f(-x,y).\end{cases}$

再如，D 关于 x 轴对称，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)=f(x,-y),\\ 0, & f(x,y)=-f(x,-y).\end{cases}$

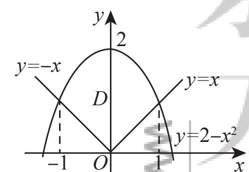
再如，D 关于原点对称，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)=f(-x,-y),\\ 0, & f(x,y)=-f(-x,-y).\end{cases}$

【例】[取自 2018 年真题数学二(6) 题]

$$\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y=$$

(A) $\frac{5}{3}$.　　(B) $\frac{5}{6}$.　　(C) $\frac{7}{3}$.　　(D) $\frac{7}{6}$.

【分析】



【例】[取自《张宇考研数学闭关修炼一百题》P19,38 题]

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加,证明 $\iint\limits_{D} yf(y)\mathrm{d}\sigma > \frac{b^2-a^2}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,其中 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b\}$.

【分析】

二、计算

1. 直角系

①X 型区域(上下型).

后积先定限,限内画直线,先交写下限,后交写上限.

②Y 型区域(左右型).

【例 1】[取自 2018 年真题数学二(17) 题]

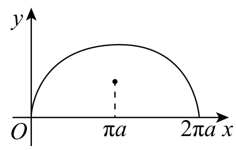
设平面区域 D 由曲线$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 与 x 轴围成,计算二重积分

$$\iint\limits_D (x + 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【分析】

【例 2】[取自《张宇考研数学闭关修炼一百题》P21，41 题]

如图所示，由 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi, a>0)$，$y=0$ 所围均匀薄片质心 $\bar{y}=$ ________.



【分析】

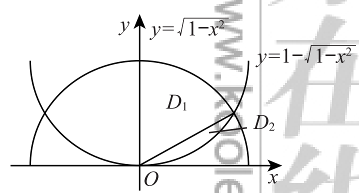
2. 极坐标系

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

【例】[取自《张宇考研数学闭关修炼一百题》P20,39 题]

计算二重积分 $I=\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$D$ 是由 $x^2+y^2=1$ 的上半圆与 $x^2+y^2=2y$ 的下半圆围成的区域.

【分析】



第三讲　微分方程

综述

按类求解,对号入座

1. 一阶方程(可分离变量,齐次型,一阶线性型,可降阶)

2. 高阶方程(齐次、非齐次)

3. 应用题

引言

基本概念

1. $F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$

2. 阶数 —— 方程中 y 的最高阶导数的阶数$\begin{cases} n=1, & \text{一阶}, \\ n\geqslant 2, & \text{高阶} \end{cases}$

3. 通解 —— 解中所含独立常数的个数 = 方程的阶数

一、一阶方程

1. 变量可分离型

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F(x,y)\overset{\text{若}}{=}f(x)g(y)\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x.$$

【例】求 $y'+y^2\tan x=\tan x$ 的通解.

【分析】

2. 齐次型

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$,变量替换法.

令$\frac{y}{x}=u$,$(u=u(x))\Rightarrow y=ux\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot x+u\cdot 1\Rightarrow\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot x+u=f(u)\Rightarrow$

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot x=f(u)-u\Rightarrow\int\frac{1}{f(u)-u}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

【例】[取自《张宇考研数学闭关修炼一百题》P21,42 题]

已知函数 $y(x)(x>0)$ 可微且满足方程 $y(x)-1=\int_1^x\left[\frac{y^2(t)}{t^2}+\frac{y(t)}{t}\right]\mathrm{d}t$,则 $y(x)=$ __________.

【分析】

3. 一阶线性型

$y'+p(x)y=q(x)$，$p(x)$，$q(x)$ 为已知函数.

$\mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x}y'+p\mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x}\cdot y=\mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x}\cdot q\Rightarrow(y\cdot\mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x})'=\mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x}\cdot q\Rightarrow$

$y\cdot\mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x}=\int\mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x}q\,\mathrm{d}x+C\Rightarrow y=\mathrm{e}^{-\int p\mathrm{d}x}\left[\int\mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x}q\,\mathrm{d}x+C\right]$　公式法

【例】[取自 2018 年真题数学一(18) 题]

已知微分方程 $y'+y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是 **R** 上的连续函数.

(1) 若 $f(x)=x$，求方程的通解；

(2) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数，证明：方程存在唯一的以 T 为周期的解.

【分析】

【注】尚有两种类型的方程，貌似二阶，实可降阶.

①$y''=f(x,y')$ 型——缺 y.

【分析】缺 y 则干掉 y'，y''，“赶尽杀绝”.

令 $y'=p$，则 $y''=p'$.

则 $p'=f(x,p)\begin{cases}\text{可分离变量，}\\\text{齐次，}\\\text{一阶微分方程.}\end{cases}$

②$y''=f(y,y')$ 型——缺 x.

【分析】缺 x，绝不允许 x 再出现.

令 $y'=p$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$.

故 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p=f(y,p)$.

【例】求 $2yy''=(y')^2+y^2$ 满足 $\begin{cases}y(0)=1,\\y'(0)=-1\end{cases}$ 的特解.

【分析】

二、高阶方程($2 \sim 4$ 阶)

1. $y'' + py' + qy = 0$(p,q 为常数)—— 二阶常系数齐次线性方程

① 写特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$,$\Delta = p^2 - 4q$,

写通解:$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y_{通} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \\ \Delta = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \Rightarrow y_{通} = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}, \\ \Delta < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i \Rightarrow y_{通} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \end{cases}$

【例】 设 $\cos x$ 与 $x e^x$ 为 4 阶常系数线性齐次微分方程的两个解,则首项系数为 1 的该方程为

2. $y'' + py' + qy = e^{\alpha x} P_m(x)$,$P_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式

通解为:$y_{非齐次通} = y_{齐通} + y^*_{非齐次特}$.

y^* 的设定:设 $y^* = e^{\alpha x} Q_m(x) \cdot x^k$,$Q_m(x)$ 为 x 的 m 次一般多项式;

k 的设定:一看:自由项中的 α;

二算:解特征方程 $\Rightarrow \lambda_{1,2}$;

三比较:$k = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \lambda_{1,2}, \\ 1, & \alpha = \lambda_1 \text{ 或 } \alpha = \lambda_2, \\ 2, & \alpha = \lambda_1 = \lambda_2. \end{cases}$

【例】 求 $y'' - 4y = e^{2x}(x - 2)$ 的通解.

【分析】

三、应用题

(1) 背景公平 —— 信息给予.

(2) 翻译成数学表达式.

【例】已知 $S=12.8p^2-128, D=-4.4p^2+130$,设 $p(t)$ 随时间的变化率与 $D-S$ 成正比,与 p 成反比,$k=\dfrac{1}{4}, p(0)=5$.

(1) 建立 $p(t)$ 满足的微分方程;

(2) 通过 $y=p^2$,求解此方程.

【分析】

第四讲　无穷级数

综述

1. 数项级数的判敛
2. 幂级数的收敛域
3. 展开与求和

引言

1. 概念

给出$\{u_n\}$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 叫无穷级数.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

2. 分类

$$\begin{cases} \text{（常）数项级数} \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \geqslant 0) \text{ 正项级数}, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n (u_n > 0) \text{ 交错级数}, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \text{ 符号无限制}) \text{ 任意项级数}, \end{cases} \\ \text{函数项级数：} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ 幂级数} \end{cases}$$

一、数项级数的判敛

1. 正项级数的判敛

① 收敛原则(考抽象).

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 有上界.

【分析】$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \geqslant 0$.

$\{S_n\}$ 有上界 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 有界 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ 收敛.

【例】(1) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数,证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 有界;

(2) 设 $\{x_n\}$ 为单增的有界正数数列,证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ 收敛.

【分析】

② 比较判别法.

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数,且 $u_n \leqslant v_n$,则$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 散}. \end{cases}$

③ 比较判别法的极限形式.

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数,则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \begin{cases} 0 \Rightarrow u_n \text{ 小} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 散}, \end{cases} \\ \infty \Rightarrow v_n \text{ 小} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 散}, \end{cases} \\ A \neq 0 \Rightarrow \text{同敛散}. \end{cases}$$

【例】[取自《张宇考研数学闭关修炼一百题》P24,48 题]

设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 满足 $e^{b_n} = e^{a_n} - a_n (n = 1,2,3,\cdots)$,求证:

(1) 若 $a_n > 0$,则 $b_n > 0$;

(2) 若 $a_n > 0 (n = 1,2,3,\cdots)$,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$ 收敛.

【分析】

④ 比值判别法(达朗贝尔判别法).

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\begin{cases}<1,收,\\>1,散,\\=1,该法失效,另谋他法.\end{cases}$$

(如通项中含有a^n,$n!$)

⑤ 根值判别法(柯西判别法).

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho\begin{cases}<1,收,\\>1,散,\\=1,该法失效,另谋他法.\end{cases}$$

【例】判别$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$在$x=2,3$处的敛散性.

【分析】

2. 交错级数($\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, u_n>0$) 的判敛

(1) 莱布尼茨判别法.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, u_n>0$ 满足:

① $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$;

② $u_n \geqslant u_{n+1}$.

则级数收敛.

(2) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$,条件收敛还是绝对收敛.

【注】 比较

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}\begin{cases}|q|<1\Rightarrow \text{收敛,且收敛于}\dfrac{a}{1-q},\\ |q|\geqslant 1\Rightarrow \text{发散}.\end{cases}$

2) p-级数: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}\begin{cases}p>1\Rightarrow \text{收敛},\\ p\leqslant 1\Rightarrow \text{发散}.\end{cases}$

3) 广义 p-级数: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}\begin{cases}p>1\Rightarrow \text{收敛},\\ p\leqslant 1\Rightarrow \text{发散}.\end{cases}$

4) 交错 p-级数: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^p}\begin{cases}p>1\Rightarrow \text{绝对收敛},\\ 0<p\leqslant 1\Rightarrow \text{条件收敛}\end{cases}(p>0)$.

3. 任意项级数($\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n, u_n$ 符号无限制) 的判敛

(1) 思路上, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 加绝对值 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|\geqslant 0$.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

(2) 理论上 $\begin{cases}\text{若}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|\text{发散},\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\text{拆成正项级数}+\text{交错级数,收敛}\end{cases}\Rightarrow$ 条件收敛.

【例 1】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^{p}}(p>0)$

【分析】

【例 2】已知 $f(x)$ 可导，$0<f'(x)<\dfrac{1}{2}$，设数列$\{x_n\}$满足 $x_{n+1}=f(x_n)$，$n=1,2,\cdots$，

证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛.

【分析】

二、幂级数的收敛域

1. 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

(1) 具体到 $x=x_0$，代入 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n\Rightarrow$ 判敛.

若收敛，称 x_0 为收敛点；

若发散，称 x_0 为发散点.

(2) 目标：找到所有的收敛点的集合，找收敛域.

(3) 求收敛域的程序.

①$\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n(x)|$，

② 用$\begin{cases} \text{比值判别法:} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \rho(x) < 1, \\ \text{根值判别法:} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \rho(x) < 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ 收敛区间;

③ 单独讨论两个端点 a,b,判断收敛域.

【例】求$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$的收敛域.

【分析】

三、展开与求和

需要熟稔于心的几个重要幂级数展开式

(1)$e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots, -\infty < x < +\infty.$

(2)$\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, -1 < x < 1.$

(3)$\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, -1 < x < 1.$

(4)$\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \cdots, -1 < x \leqslant 1.$

$$(5)\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,-\infty<x<+\infty.$$

$$(6)\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,-\infty<x<+\infty.$$

$$(7)(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$$

$$\begin{cases}x\in(-1,1),\text{当}\ \alpha\leqslant -1,\\ x\in(-1,1],\text{当}-1<\alpha<0,\\ x\in[-1,1],\text{当}\ \alpha>0.\end{cases}$$

1. 展开

【例 1】写出 $f(x)=\ln(\mathrm{e}-x)$ 在 $x=0$ 处的麦克劳林展开式，并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ 的值.

【分析】

【例 2】[取自 2018 年真题数学三(18) 题]

已知 $\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n(-1<x<1)$,求 a_n.

【分析】

2. 求和

【例 1】求 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$, $|x|<1$.

【分析】

【例 2】$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\ |x|<1$

【分析】

【注】分母上有$(an+b)$，先导后积.

【例 3】[取自《张宇考研数学闭关修炼一百题》P26，51 题]

（数学一　数学三）求级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n\cdot 3^n}$的收敛域及其和函数.

【分析】

【例 4】[取自 2017 年真题数学三(19) 题]

设 $a_0=1, a_1=0, a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})(n=1,2,3,\cdots)$, $S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(1) 证明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1;

(2) 证明 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0(x\in(-1,1))$,并求 $S(x)$ 的表达式.

【分析】

四、傅氏级数

1. 狄氏收敛性定理

设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期,在 $[-l,l]$ 上满足

1) 连续或只有有限个第一类间断点;

2) 只有有限个极值点.

则 $f(x)$ 的傅氏级数 $S(x)$ 在 $[-l,l]$ 上处处收敛,且

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\text{ 为连续点}, \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x\text{ 为间断点}, \\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}, & x\text{ 为端点}. \end{cases}$$

【例】设 $f(x)=\begin{cases}x+1, -1\leqslant x\leqslant 0\\ x-1, 0<x\leqslant 1\end{cases}$ 的周期为 2 的傅氏级数为 $S(x)$，

则 $S(-1/2)=$ ________，$S(0)=$ ________，$S(1)=$ ________，$S(3/2)=$ ________.

【分析】

2. 周期为 $2l$ 的函数的傅氏展开

$$f(x)\sim S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

$[-l,l]$ 上 $f(x)$ 的展开 $\begin{cases}a_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x,\\ a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x.\end{cases}$

$[-l,l]$ 上 $f(x)$ 是奇 / 偶的展开

$\begin{cases}1.\ \text{奇}\ a_0=0, a_n=0, b_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\text{正弦},\\ 2.\ \text{偶}\ a_0=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\mathrm{d}x,\\ a_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\quad \text{余弦}\\ b_n=0.\end{cases}$

$[0,l]$ 上 $f(x)$ 展开成正弦或余弦级数 $\begin{cases}\text{做奇延拓}, f(x)\ \text{奇},\\ \text{做奇延拓}, f(x)\ \text{偶}.\end{cases}$

【例 1】设 $S(x)$ 是 $f(x)=\begin{cases} e^{x}, 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}, \\ e^{-x}, \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$ 展开为正弦级数的和函数，则 $S(\dfrac{3\pi}{2})=$ ________.

【分析】

【例 2】设 $f(x)$ 以 2π 为周期，$f(x)=\begin{cases} -1, -\pi<x<0, \\ 1, 0\leqslant x\leqslant\pi, \end{cases}$ 将 $f(x)$ 展开成傅氏级数.

【分析】

第五讲　多元函数积分学(数一专题)

【注】 先修课程:扫码学习高数18讲的16,17,18讲,有6个小时的理论讲解与例题分析.

综述

1. 预备知识
2. 三重积分
3. 第一型积分
4. 第二型积分(格林公式,高斯公式)
5. Stokes公式

在强化班中,精选或命制了十大例题,巩固所学,做好预测.

【例 1】 曲面 $x^2 + \cos(xy) + yz + x = 0$ 在点$(0,1,-1)$处的切平面方程为________.

【分析】

【例 2】将 $L:\begin{cases}2z-y=0,\\x^2+y^2+z^2-yz=1\end{cases}$ 投至 xOy 面,求其投影曲线所围区域.

【分析】

【例 3】设直线 L 过 $A(1,0,0,)$,$B(0,1,1)$,将 L 绕 z 轴旋转一周得曲面 $\sum$,求 $\sum$ 的方程.

【分析】

【例 4】设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，求$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}$，$\boldsymbol{l}$ 方向任意.

【分析】

【**例 5**】设$\sum$是曲面$x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$，$\sum_1$是平面$x=0$被$\begin{cases}3y^2+3z^2=1,\\x=0\end{cases}$所围的部分、$\Omega$为$\sum$与$\sum_1$所围的立体，计算三重积分

$$\iiint\limits_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)\mathrm{d}v.$$

【**分析**】先一后二法（投影穿线法）.

【例 6】$I=\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v$，$\Omega=\{(x,y,z)\mid z\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\sqrt{3}z,0\leqslant z\leqslant 4\}$.

【分析】

【例 7】 设 L 是以原点 O 为圆心，2 为半径的圆周位于 $A(-2,0)$ 与 $B(0,2)$ 之间的一段劣弧，计算 $I=\int_L[x\ln(x^2+y^2)+y\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}]\mathrm{d}s$.

【分析】

【例 8】 设 $\sum = \{(x,y,z) \mid z = \sqrt{x^2+y^2}, 1 \leqslant z \leqslant 4\}$，求 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$.

【分析】

【例 9】[取自 2018 年真题数学一(17) 题]

设$\sum$是曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧,计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【分析】

【例 10】[取自《张宇考研数学闭关修炼一百题》P30，59 题]

计算 $I=\oint_L y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$，$L$：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\ x^2+y^2=Rx\end{cases}$ $R>0$，$z\geqslant 0$，从 z 轴正向看下去为逆时针方向.

【分析】